

## Об упрощенных методах определения упругих постоянных слоистых полимерных композитов

### On simplified methods for determining the elastic constants of layered polymer composites

Д.Д. ВЛАСОВ, О.Ю. СКЛЕМИНА, А.Э. ПОЛЯКОВ

D.D. VLASOV, O.Y. SKLEMINA, A.E. POLYAKOV

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия  
Institute of Mechanical Engineering named after A. A. Blagonravov of RAS, Moscow, Russia  
sklemina97@yandex.ru

В работе рассматривается стандартный послойный метод расчета композитных конструкций. Выделены основные проблемы метода и проанализированы подходы, позволяющие упростить расчет. Показано, что с помощью перехода к инвариантам можно восстановить упругие постоянные монослоя на основе только одного эксперимента. Рассмотрены упрощенные тензорные преобразования при повороте системы координат. Сделан вывод о границах применимости упрощенных соотношений для различных материалов.

**Ключевые слова:** полимерные волокнистые композиты, послойный метод расчета, упругие постоянные, инвариант, модуль упругости вдоль волокон, анизотропия свойств

The paper considers the standard layer-by-layer method for calculating composite structures. The main problems of the method are highlighted and the approaches which allow to simplify the calculation are analyzed. It is shown that the transition to trace can be used to restore the elastic constants of a monolayer on the basis of only one experiment. Simplified tensor transformations for rotating the coordinate system are considered. The conclusion about the limits of applicability of the simplified relations for different materials is made.

**Keywords:** polymer fiber composites, layer-by-layer method of calculation, elastic constants, trace, modulus of elasticity along fibers, anisotropy of properties

DOI: 10.35164/0554-2901-2023-11-12-17-20

#### Введение

В последние десятилетия стремительно растет доля применения в промышленности волокнистых полимерных композитов (ПКМ), что делает актуальными вопросы проектирования ответственных композитных конструкций. При этом сами материалы обладают сложной неоднородной структурой: несущие детали зачастую представляют собой набор однонаправленных слоев угле-, стекло- или органопластика, расположенных под различными углами. Ввиду одновременно слоистой и волокнистой структуры для ПКМ характерна существенная анизотропия упругих и прочностных свойств, что значительно осложняет инженерный расчет элементов конструкций.

На сегодняшний день главный инструмент для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) и прочности композитов – это послойный метод. Он необходим для решения двух основных задач в механике композитов: расчета напряжений в монослоях при известных средних напряжениях всего пакета слоев, а также для определения упругих свойств детали на основе характеристик монослоя [1, 2]. Метод нашел широкое применение в различных расчетных комплексах и программах. Однако в ходе его реализации возникают принципиальные сложности на нескольких промежуточных этапах. В первую очередь, для пересчета технических констант материала в матричные необходимо знать весь набор упругих постоянных монослоя, что требует проведения целого комплекса испытаний. А во-вторых, выражения для тензорных преобразований при переходе от системы координат (СК) монослоя в СК детали являются громоздкими и неудобными, что создает проблемы, например, при ручных или итерационных расчетах.

Целью настоящей работы является обзор и обоснование применимости существующих методов упрощения послойного метода расчета композитных конструкций. Для этого рассмотрены расчеты слоистых углепластиков и стеклопластиков по двум приближенным методикам и их сравнение с классическими методами.

#### Послойный метод расчета композитных конструкций

Послойный метод расчета НДС волокнистых композитов обычно делится на восемь этапов. Полное описание методики не входит в задачи авторов, потому далее рассмотрены только этапы, вызывающие сложности при расчетах [3].

*Первый этап* заключается в экспериментальном определении технических упругих постоянных однонаправленного монослоя (рис. 1). Поскольку в данном случае рассматривается плоское НДС ортотропного материала, необходимо определить четыре независимые постоянные: два модуля Юнга  $E_1$ ,  $E_2$ , модуль сдвига  $G_{12}$  и коэффициент Пуассона  $\nu_{12}$ . Меньший коэффициент Пуассона не является независимым и определяется из выражения:

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12} E_2}{E_1}$$

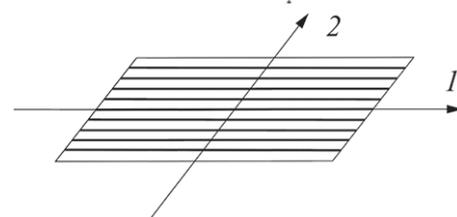


Рис. 1. Однонаправленный монослой ПКМ.

На *втором этапе* технические константы пересчитываются в матричные по формулам:

$$\begin{aligned} E_{11}^0 &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; & E_{22}^0 &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \\ E_{12}^0 &= \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; & E_{66}^0 &= G_{12}. \end{aligned} \quad (1)$$

Так находятся четыре компоненты матрицы упругих модулей  $[E^0]$  монослоя. Схожим образом определяются и компоненты ма-

трицы податливостей  $[S^0]$ . Надстрочный индекс «0» относится к характеристикам монослоя.

Третий этап сводится к преобразованию матрицы упругих модулей  $[E^0]$  и податливостей  $[S^0]$  в координатах монослоя к матрицам в координатах детали  $[E_\alpha^0]$ ,  $[S_\alpha^0]$  (рис. 2) с помощью тензорных преобразований (2). Здесь следует отметить, что при повороте СК монослоем теряет свойство упругой симметрии, поэтому число констант в новых матрицах равно шести. Для удобства записи приняты обозначения  $\cos\alpha = c$ ;  $\sin\alpha = s$ .

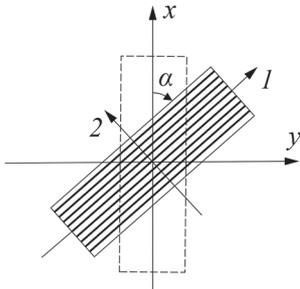


Рис. 2. Схема поворота системы координат.

$$\begin{aligned}
 E_{xxxx}^0 &= E_{11}^0 c^4 + E_{22}^0 s^4 + 2(E_{12}^0 + 2E_{66}^0) s^2 c^2; \\
 E_{xyxy}^0 &= (E_{11}^0 + E_{22}^0 - 4E_{66}^0) s^2 c^2 + E_{12}^0 (s^4 + c^4); \\
 E_{xxyy}^0 &= [E_{11}^0 c^2 - E_{22}^0 s^2 + (E_{12}^0 + 2E_{66}^0)(s^2 - c^2)] sc; \\
 E_{yyyy}^0 &= E_{11}^0 s^4 + E_{22}^0 c^4 + 2(E_{12}^0 + 2E_{66}^0) s^2 c^2; \\
 E_{yyxy}^0 &= [E_{11}^0 s^2 - E_{22}^0 c^2 - (E_{12}^0 + 2E_{66}^0)(s^2 - c^2)] sc; \\
 E_{xyxy}^0 &= (E_{11}^0 - 2E_{12}^0 + E_{22}^0 + 2E_{66}^0) s^2 c^2 + E_{66}^0 (s^4 + c^4).
 \end{aligned} \tag{2}$$

В рамках последующих этапов сначала на основе ряда допущений определяются упругие свойства всей детали  $[E]$  и  $[S]$ , из известных средних напряжений высчитываются средние деформации, а затем на их основе напряжения в каждом слое в координатах детали и, далее, монослоя. Последний этап послойного метода заключается в применении критериев разрушения для каждого монослоя и итерационном пересчете для определения момента выхода из строя всей конструкции [4].

Нумерация этапов указывает на их очередность именно в алгоритме послойного метода. Отсюда следует, что описанные выше сложности возникают уже в самом начале расчета.

*Восстановление технических упругих констант с помощью инвариантов*

Экспериментальное определение полного набора технических упругих постоянных материала, как известно, сопряжено с методическими трудностями. Если нахождение модуля Юнга вдоль и поперек волокон не вызывает проблем (с некоторыми оговорками), то для точного определения модуля сдвига и коэффициента Пуассона необходимы специальные оснастка, оборудование и методики.

Частичное решение этой проблемы с помощью инвариантов представлено в работе [5]. Для перехода к инвариантам необходимо понизить степень синусов и косинусов в выражении (2). Из стандартных тригонометрических преобразований следует:

$$\begin{aligned}
 s^4 &= \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8}; \quad c^4 = \frac{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8} \\
 s^3 c &= \frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{8}; \quad sc^3 = \frac{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{8}; \quad s^2 c^2 = \frac{1 - \cos 4\alpha}{8}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Если подставить (3) в (2) и привести подобные слагаемые, можно получить выражения, которые удобно представить матричным виде.

$$\begin{pmatrix} E_{xxxx}^0 \\ E_{yyyy}^0 \\ E_{xxyy}^0 \\ E_{yyxy}^0 \\ E_{xyxy}^0 \\ E_{xyxy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & 0 & 0 \\ V_1 & -V_2 & V_3 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & -V_3 & 0 & 0 \\ V_5 & 0 & -V_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_2/2 & V_3 \\ 0 & 0 & 0 & V_2/2 & -V_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \cos 4\alpha \\ \sin 2\alpha \\ \sin 4\alpha \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{3E_{11}^0 + 3E_{22}^0 + 2E_{12}^0 + 4E_{66}^0}{8} \\
 V_2 &= \frac{E_{11}^0 - E_{22}^0}{2} \\
 V_3 &= \frac{E_{11}^0 + E_{22}^0 - 2E_{12}^0 - 4E_{66}^0}{8} \\
 V_4 &= \frac{E_{11}^0 + E_{22}^0 + 6E_{12}^0 - 4E_{66}^0}{8} \\
 V_5 &= \frac{E_{11}^0 + E_{22}^0 - 2E_{12}^0 + 4E_{66}^0}{8}.
 \end{aligned}$$

Из выражений  $V_1$  независимыми от угла при усреднении (инвариантами) являются только  $V_1$ ,  $V_4$  и  $V_5$ . Далее С. Цай рассматривает линейную комбинацию вида:

$$2(V_1 + V_5) = E_{11}^0 + E_{22}^0 + 2E_{66}^0 = \text{trace}[E^0]. \tag{5}$$

Здесь необходимо подробнее остановиться на терминологии. Название «trace» выбрано автором по аналогии со следом матрицы. Однако выражение (5) не является суммой диагональных элементов в чистом виде. Тем не менее для простоты изложения далее будет использовано именно это обозначение.

В табл. 1 представлены упругие характеристики различных видов углепластика, матричные константы, определенные с помощью соотношений (1), а также значение «trace» для каждого материала.

Таблица 1. Упругие характеристики различных видов углепластика.

Марка	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$E_{11}^0$	$E_{22}^0$	$E_{12}^0$	$E_{66}^0$	«trace»
IM7/977-3	191	9,9	7,8	0,35	192,2	10,0	3,5	7,8	217,8
T300/N5208	181	10,3	7,2	0,28	181,8	10,3	2,9	7,2	206,5
КМУ-3	180	9,0	5,2	0,31	180,9	9,0	2,8	5,2	200,2
IM7/MTM45	175	8,2	5,5	0,33	175,9	8,2	2,7	5,5	195,1
IM7/8552	171	9,1	5,3	0,32	171,9	9,1	2,9	5,3	191,6
T300/934	148	9,7	4,6	0,30	148,9	9,7	2,9	4,6	167,7
AS/H3501	138	8,9	5,1	0,30	138,8	9,0	2,7	5,1	162,0
T700/C-Ply 55	121	8,0	4,7	0,30	121,7	8,0	2,4	4,7	139,2

В табл. 2 приведены нормированные на величину «trace» значения  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  и  $\nu_{12}$ , средние величины которых могут с достаточной точностью считаться константами всего класса материалов (в данном случае – углепластика).

Таблица 2. Нормированные на величину «trace» упругие константы.

Марка	$E_1/\langle\text{trace}\rangle$	$E_2/\langle\text{trace}\rangle$	$G_{12}/\langle\text{trace}\rangle$	$\nu_{12}/\langle\text{trace}\rangle$
IM7/977-3	0,877	0,046	0,036	0,0016
T300/N5208	0,877	0,050	0,035	0,0014
КМУ-3	0,899	0,045	0,026	0,0015
IM7/MTM45	0,897	0,042	0,028	0,0017
IM7/8552	0,892	0,047	0,028	0,0017
T300/934	0,883	0,058	0,027	0,0018
AS/H3501	0,852	0,055	0,032	0,0019
T700/C-Ply 55	0,869	0,057	0,034	0,0022
Ср. знач.	0,881	0,050	0,031	0,0017
Ср. откл.	0,012	0,005	0,004	0,0002

Отсюда следует, что «trace» можно определить и без пересчета матричных констант – лишь на основе технических, полученных в эксперименте.

$$\text{"trace"}[E^0] \approx \frac{E_1}{0,881} \approx \frac{E_2}{0,050} \approx \frac{G_{12}}{0,031} \approx \frac{\nu_{12}}{0,0017}. \quad (6)$$

Поскольку жесткость монослоя определяется в значительной степени модулем Юнга вдоль волокон, целесообразно находить «trace» именно в виде  $E_1/0,88$ . По аналогии с табл. 2 можно провести нормирование и матричных постоянных. Тогда выражение (6) переписывается в виде:

$$\text{"trace"}[E^0] \approx \frac{E_{11}^0}{0,885} \approx \frac{E_{22}^0}{0,050} \approx \frac{E_{66}^0}{0,031} \approx \frac{E_{12}^0}{0,015}. \quad (7)$$

Таким образом, проводя только один относительно несложный эксперимент на определение модуля Юнга вдоль волокон, можно восстановить значения матричных упругих постоянных, необходимых для дальнейших расчетов. В табл. 3 приведено сравнение значений «trace» из табл. 1 и «trace»\*, посчитанных на основе  $E_1$  по формуле (6), а также восстановленные матричные константы.

Таблица 3. Восстановленные с помощью «trace»\* матричные константы.

Марка	«trace»	«trace»*	$E_{11}^{0*}$	$E_{22}^{0*}$	$E_{12}^{0*}$	$E_{66}^{0*}$
IM7/977-3	217,8	217,0	192,2	10,9	3,4	6,7
T300/N5208	206,5	205,7	182,1	10,3	3,2	6,3
КМУ-3	200,2	204,5	181,1	10,3	3,2	6,3
IM7/MTM45	195,1	198,9	176,1	10,0	3,1	6,1
IM7/8552	191,6	194,3	172,1	9,7	3,0	6,0
T300/934	167,7	168,2	148,9	8,4	2,6	5,2
AS/H3501	162,0	156,8	138,9	7,9	2,4	4,8
T700/C-Ply 55	139,2	137,5	121,8	6,9	2,1	4,2

Те же вычисления можно провести для стеклопластика [6, 7]. В табл. 4–6 представлены исходные данные и результаты расчетов.

Таблица 4. Упругие характеристики различных видов стеклопластика.

Марка	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$E_{11}^0$	$E_{22}^0$	$E_{12}^0$	$E_{66}^0$	«trace»
ВПС-38Т	45,3	10,2	5,6	0,27	46,1	10,4	2,8	5,6	67,6
S-Glass/epoxy	41,5	8,0	3,1	0,25	42,1	8,1	2,0	3,1	56,4
D-Glass/epoxy	39,2	7,8	3,4	0,29	39,9	7,9	2,3	3,4	54,6
E-glass/epoxy	39,0	8,6	3,8	0,28	39,7	8,8	2,5	3,8	56,0

Таблица 5. Нормированные на величину «trace» упругие константы.

Марка	$E_1/\text{«trace»}$	$E_2/\text{«trace»}$	$G_{12}/\text{«trace»}$	$\nu_{12}/\text{«trace»}$
ВПС-38Т	0,670	0,151	0,083	0,0040
S-Glass/epoxy	0,737	0,142	0,055	0,0044
D-Glass/epoxy	0,718	0,142	0,062	0,0053
E-glass/epoxy	0,696	0,154	0,068	0,0050
Ср. знач.	0,705	0,147	0,067	0,0050
Ср. откл.	0,022	0,005	0,008	0,0005

Таблица 6. Восстановленные с помощью «trace»\* матричные константы.

Марка	«trace»	«trace»*	$E_{11}^{0*}$	$E_{22}^{0*}$	$E_{12}^{0*}$	$E_{66}^{0*}$
ВПС-38Т	67,6	64,3	46,1	9,6	2,6	4,3
S-Glass/epoxy	56,4	58,9	42,2	8,8	2,4	3,9
D-Glass/epoxy	54,6	55,6	39,9	8,3	2,3	3,7
E-glass/epoxy	56,0	55,3	39,7	8,3	2,3	3,7

Использование инвариантов для пересчета матричных постоянных на основе одного модуля упругости вдоль волокон позволяет завершить первый и второй этапы послойного метода без особых сложностей.

Упрощенный метод тензорных преобразований

Несколько иной принцип применяется для решения второй проблемы послойного метода расчета композитов – громоздкости тензорных преобразований при повороте СК (2). Как было отмечено ранее, для сильно анизотропных однонаправленных материалов характерно:  $E_{11}^0 \gg E_{22}^0, E_{12}^0, E_{66}^0$ . Тогда для упрощения выражений поворота константы  $E_{22}^0, E_{12}^0, E_{66}^0$  можно принять равными нулю. И соотношения (2) переписываются в виде:

$$\begin{aligned} E_{xxxx}^0 &\approx E_{xxxx}^{0*} = E_{11}^0 c^4; \\ E_{xxyy}^0 &\approx E_{xxyy}^{0*} = E_{11}^0 s^2 c^2; \\ E_{xxxy}^0 &\approx E_{xxxy}^{0*} = E_{11}^0 c^3 s; \\ E_{yyyy}^0 &\approx E_{yyyy}^{0*} = E_{11}^0 s^4; \\ E_{yyxy}^0 &\approx E_{yyxy}^{0*} = E_{11}^0 s^3 c; \\ E_{xyxy}^0 &\approx E_{xyxy}^{0*} = E_{11}^0 s^2 c^2. \end{aligned} \quad (8)$$

На основе данных табл. 1, 4 были проведены расчеты компонент матриц  $[E_\alpha^0]$  и  $[E_\alpha^{0*}]$  для угле- и стеклопластика. Результаты представлены в виде графиков (рис. 3 – углепластик; рис. 4 – стеклопластик) зависимостей  $E_{ijkl}^0(\alpha)$  для всех шести компонент матрицы  $[E_\alpha^0]$ , модулей упругости. Сплошной линией на графиках обозначены компоненты, а пунктирной –  $[E_\alpha^{0*}]$ .

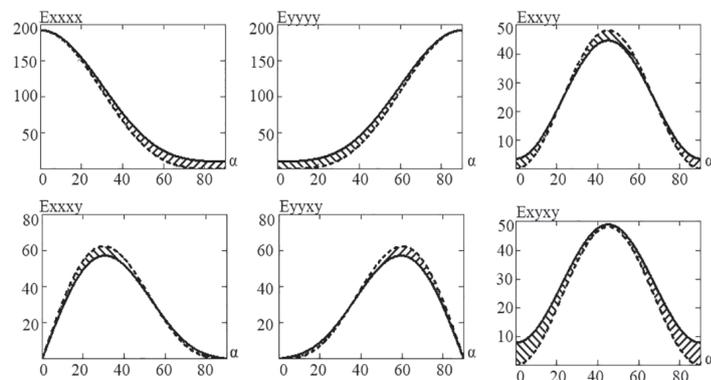


Рис. 3. Зависимости компонент матрицы модулей упругости углепластика от угла поворота.

Из рис. 3 и 4 видно, что расхождение значений упругих констант, рассчитанных по соотношениям (2) и (8) для углепластиков значительно ниже, чем для стеклопластиков. Объяснить это можно тем, что для углепластика  $E_{11}^0/E_{22}^0 \approx 20$ , а для стеклопластика –  $E_{11}^0/E_{22}^0 \approx 5$ , и влиянием остальных компонент матрицы модулей упругости монослоя пренебрегать некорректно.

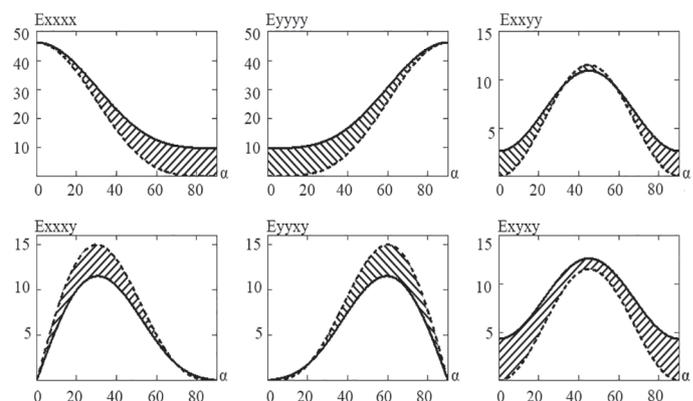


Рис. 4. Зависимости компонент матрицы модулей упругости стеклопластика от угла поворота.

Для определения границ применимости упрощенного подхода были построены зависимости относительного отклонения констант (9) от значения модуля упругости вдоль волокон  $E_1$ . Для демонстрационного расчета на основе табл. 1 и 4 усредненные значения  $E_2 = 9, G_{12} = 5$  и  $\nu_{12} = 0,3$  считались постоянными, изменялся только модуль  $E_1 = 39...192$ , таким образом,  $E_{11}^0/E_{22}^0 \approx 4...20$ . Угол поворота  $\alpha = 30^\circ$ .

$$\Delta_{xxxx} = \frac{\left\| E_{xxxx}^0 \right\| - \left\| E_{xxxx}^{0*} \right\|}{\left\| E_{xxxx}^0 \right\|};$$

$$\Delta_{yyyy} = \frac{\left\| E_{yyyy}^0 \right\| - \left\| E_{yyyy}^{0*} \right\|}{\left\| E_{yyyy}^0 \right\|};$$

...

Поскольку вид полученных зависимостей для всех констант одинаков, удобнее рассмотреть усредненную кривую (рис. 5):

$$\Delta_{общ} = \frac{\sum \Delta_{ijkl}}{6}. \tag{10}$$

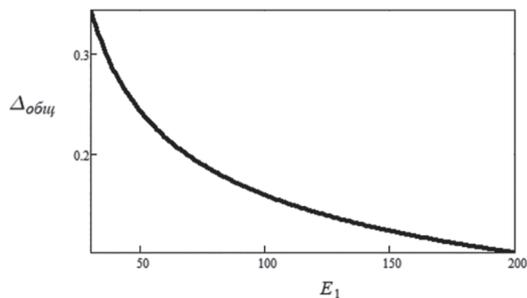


Рис. 5. Зависимость  $\Delta_{общ}$  от значения  $E_1$ .

*Выводы*

1. Применение послойного метода расчета композитных конструкций сопряжено с двумя основными сложностями: экспериментальное определение технических упругих постоянных монослоя и громоздкость тензорных преобразований при повороте системы координат.

2. С помощью перехода к инварианту «трассе», который определяется для углепластиков соотношением  $E_1/0,88$ , а для стеклопластиков  $E_1/0,71$ , можно, находя в эксперименте только модуль упругости вдоль волокон  $E_1$ , с приемлемой точностью восстановить остальные технические и матричные упругие постоянные монослоя.

3. Поскольку продольный модуль упругости в однонаправленных композитах на порядок выше, чем поперечный, в стандартных тензорных преобразованиях можно пренебречь всеми матричными постоянными кроме  $E_{11}^0$ , что значительно упрощает вычисления.

4. Упрощенные тензорные преобразования справедливы для углепластиков. Для стеклопластиков, у которых  $E_{11}^0/ E_{22}^0 \approx 5$ , упрощенные зависимости сильно отличаются от точных выражений, что делает упрощенный подход нецелесообразным.

**Литература**

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1988. 712 с.
2. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М: Машиностроение, 1984. 264 с.
3. Полилов А.Н. Экспериментальная механика композитов. Учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 375 с.
4. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Биомеханика прочности волокнистых композитов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. 328 с.
5. Stephen W. Tsai, José Daniel D. Melo, Sangwook Sihm, Albertino Arteiro, Robert Rainsberger. Composite Laminates. Theory and practice of analysis, design and automated layup. Stanford University Composites Design Group, 2017. 373 с.
6. Shankaregowda K.C., Sridhar H.S., Ravi S.M. Computational Analysis of Fatigue Life of S-Glass/Epoxy Composite Drive Shaft // International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology. 2018. Vol. 7, No7, P. 28–34.
7. FRP reinforcement in RC structures: technical report prepared by a working party of Task Group 9.3 FRP (Fibre Reinforced Polymer) reinforcement for concrete structures // Bulletin FIB: Technical report. V40. 2007.147 p.