

## Теплообмен и диспергирование при течении неньютоновской композиции в сходящемся канале

### Heat transfer and dispersion in non-Newtonian compound flow in a converging channel

А.В. БАРАНОВ

A.V. BARANOV

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, Москва, Россия

Gubkin RGU of Oil and Gas (NRU), Moscow, Russia

alexvbaranov@yahoo.co.uk

Исследуется течение и теплообмен неньютоновской жидкости в сходящемся канале. Основные допущения при постановке задачи были сделаны на основании низкого значения числа Рейнольдса и высокого значения числа Пекле. В качестве реологической модели используется модель Эллиса с вязкостью, зависящей от температуры и степени диспергирования наполнителя. Рассматриваются высоковязкие среды, поэтому в уравнении энергии учитывается диссипативный член. Используются тепловые граничные условия первого рода. Переменная вязкость оказывает заметное действие на поля температуры, напряжений и скорости по длине канала. Предложенная модель дала основу для инженерного метода расчета оптимального значения высоты диспергирующего зазора. Задача решена численным методом конечных разностей с использованием итераций.

**Ключевые слова:** неньютоновская жидкость, теплообмен, полимерная композиция, диспергирование

The flow and heat transfer of a non-Newtonian fluid in a converging channel is investigated. The main assumptions in the formulation of the problem were made based on the low value of the Reynolds number and the high value of the Peclet number. The Ellis model with viscosity depending on the temperature and degree of dispersion of the filler is used as a rheological model. Highly viscous media are considered, therefore the dissipative term is taken into account in the energy equation. Thermal boundary conditions of the first kind are used. Variable viscosity has a noticeable effect on the temperature, stress and velocity fields along the length of the channel. The proposed model provided the basis for an engineering method for calculating the optimal height of the dispersing gap. The problem is solved by the numerical finite difference method using iterations.

**Keywords:** non-Newtonian fluid, heat transfer, polymer compound, dispersing

DOI: 10.35164/0554-2901-2025-03-30-32

Рассматривается процесс неизоэтермического течения неньютоновской композиции в сходящемся канале. Одна стенка канала наклонена под некоторым углом, а вторая (горизонтальная) движется с некоторой постоянной скоростью. Такой тип течения принято называть обобщенным куэттовским. Данная модель в качестве обращенной задачи может использоваться для описания процессов течения и смешения в различном смесительном оборудовании при изготовлении различных полимерных композиций. Данному процессу в переработке полимеров посвящены многочисленные публикации, частичный обзор которых приведен в [1]. В данном обзоре было отмечено, что зачастую в качестве реологической модели использовался степенной закон. Эта же реологическая модель была применена автором в [2, 3]. Однако псевдопластичная среда имеет существенный недостаток: при малых скоростях сдвига (напряжениях сдвига) эта модель дает бесконечно большую вязкость. В этой связи более предпочтительной является реологическая модель Эллиса [4, 5]. Для течения в канале (рис. 1) данная модель записывается следующим образом:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \left( 1 + k |\tau_{xy}|^{m-1} \right) \tau_{xy} \quad (1)$$

При больших скоростях (напряжениях) сдвига она описывается степенным законом, а при очень малых скоростях (напряжениях) предсказывает ньютоновское поведение. При этом анализ литературы показал отсутствие работ по описанию течения жидкости Эллиса в неизоэтермических условиях с переменной, зависящей от температуры, вязкостью. Поэтому в данной работе рассматривается неизоэтермическое течение высоковязкой неньютоновской композиции с переменной вязкостью в сходящемся канале (рис. 1). Температура среды  $T_0$  и температура стенок канала  $T_w$  не совпадают.

Таким образом, в данной работе предпринята попытка разработать относительно простую для инженерных приложений модель

данного процесса, учитывающую зависимость вязкости от температуры и степени диспергирования наполнителя.

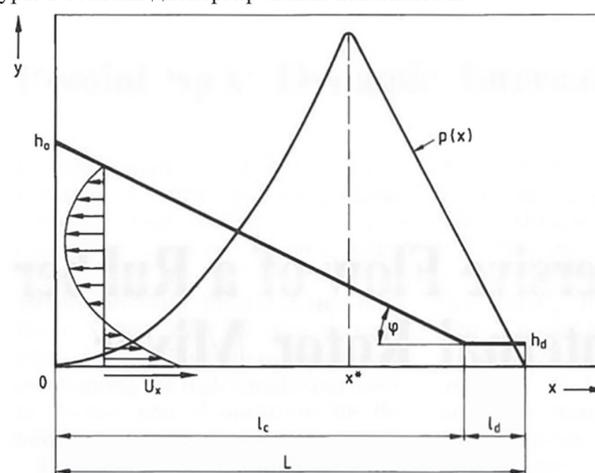


Рис. 1. Схема процесса.

Рассматриваемые полимерные среды обладают высокой вязкостью, поэтому их течение осуществляется при низких значениях критерия Рейнольдса. Это позволяет пренебречь инерционными членами в уравнении движения. Принимается также, что поперечные (вторичные) потоки в канале отсутствуют, т.е. можно ограничиться только одной продольной компонентой скорости. В безразмерном виде реологическое уравнение Эллиса (1) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial V_x}{\partial Y} = \frac{1}{\bar{\mu}} \left( 1 + K |\sigma_{xy}|^{m-1} \right) \sigma_{xy} \quad (2)$$

где  $Y = y/h_0$ ,  $V_x = v_x/\bar{v}_x$ ,  $\bar{\mu} = \mu/\mu_w$ ,  $\sigma_{xy} = \frac{\tau_{xy} h_0}{\mu_w \bar{v}_x}$ ,  $K = \frac{k \mu_w^{m-1} \bar{v}_x^{m-1}}{h_0^{m-1}}$ .

Реологическое уравнение (2) дополняется уравнением движения в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial Y} = \frac{dP}{dX}, \text{ где } P = \frac{p h_0}{\mu_w \bar{v}_x}, \quad X = x/h_0. \quad (3)$$

Математическую модель необходимо дополнить также граничными условиями:

$$Y = 0 \quad V_x = U_x, \quad \theta = 0 \quad (4)$$

$$Y = H \quad V_x = 0, \quad \theta = 0 \quad (5)$$

$$X = 0 \quad \theta = 1 \quad (6)$$

$$\text{где } \theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_0}, \quad H = \frac{h}{h_0}.$$

После первого интегрирования уравнения движения (3) получим:

$$\sigma_{xy} = \frac{dP}{dX} (Y - Y_0), \quad (7)$$

где  $Y_0 = y_0/h_0$  – ордината максимального значения скорости  $V_x$ . Если в каком-то сечении профиль скорости не имеет экстремума, то  $Y_0$  не имеет физического смысла и представляет собой константу интегрирования.

Подставив (7) в (2), имеем:

$$\frac{\partial V_x}{\partial Y} = \frac{1}{\bar{\mu}} \left( 1 + K \left| \frac{dP}{dX} \right|^{m-1} |Y - Y_0|^{m-1} \right) \frac{dP}{dX} (Y - Y_0) \quad (8)$$

После повторного интегрирования с учетом граничного условия (5) получим выражение для профиля скорости:

$$U_x = - \frac{dP}{dX} \int_0^H \frac{1}{\bar{\mu}} \left( 1 + K \left| \frac{dP}{dX} \right|^{m-1} |Y - Y_0|^{m-1} \right) (Y - Y_0) dY \quad (9)$$

Градиент давления можно найти, используя граничное условие (4):

$$U_x = - \frac{dP}{dX} \int_0^H \frac{1}{\bar{\mu}} \left( 1 + K \left| \frac{dP}{dX} \right|^{m-1} |Y - Y_0|^{m-1} \right) (Y - Y_0) dY \quad (10)$$

Для неизотермического случая решение гидродинамической задачи проводится одновременно с нахождением поля температуры. Высоковязкие полимерные композиции обладают низкой теплопроводностью. В результате течение таких сред осуществляется, как правило, при высоких значениях критерия Пекле ( $Pe > 100$ ). Это позволяет пренебречь в уравнении энергии осевой теплопроводностью по сравнению с конвективным теплопереносом. Уравнение энергии с учетом диссипации энергии имеет вид:

$$V_x \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{Br}{Pe} \sigma_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial Y}, \quad \text{где } Pe = \frac{\bar{v}_x h_0}{a}, \quad Br = \frac{\mu_w \bar{v}_x^2}{\lambda (T_w - T_0)}. \quad (11)$$

В процессе течения полимерной композиции в поле переменных напряжений и скоростей сдвига наряду с выравниванием концентраций происходит диспергирование наполнителя. Этот фактор, так же, как и диссипативный разогрев полимера, приводит к снижению вязкости композиции. В результате падают значения касательных напряжений, что влечет за собой замедление процесса диспергирования. Поэтому в данной работе учитывается зависимость вязкости не только от температуры, но и от степени диспергирования наполнителя:

$$\bar{\mu} = \exp[\psi \theta + b_2 \bar{G}], \quad \text{где } \psi = b_1 (T_0 - T_w), \quad \bar{G} = \frac{100 - G}{100 - G_0}. \quad (12)$$

Такая постановка задачи требует введения в математическую модель уравнения, описывающего кинетику диспергирования наполнителя в неоднородном поле напряжений и скоростей сдвига. При формулировании такого уравнения предполагалось, что степень диспергирования однозначно определяется удельными энергозатратами и не зависит в явном виде от температуры [6, 7]:

$$\bar{G} = \exp \left[ - \frac{g}{\rho} \int_0^t \tau_{xy} \dot{\gamma} dt \right], \quad \text{где } \dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (13)$$

Для полного определения полей скорости, температуры и давления необходимо найти еще две неизвестные величины –  $y_0$  и  $h^*$ . Для этой цели используют два известных фактора. В сечении, где реализуется максимум давления, объемный расход на единицу ширины канала приближенно может быть выражен как для изотермического куэттовского потока:

$$\frac{U_x H^*}{2} = \int_0^H V_x dY \quad (14)$$

При этом можно использовать граничные условия для давления:

$$X = 0 \quad P = P_0 \quad (15)$$

$$X = L \quad P = P_0 \quad (16)$$

Тогда можно записать:

$$\int_0^L \left( \frac{dP}{dX} \right) dX = 0, \quad (17)$$

где градиент давления  $dP/dX$  определяется по (10).

Путем совместного интегрирования (14) и (17) определяются  $Y_0$  и  $H^*$ . Если для этой цели использовать итерационный процесс, то в качестве первого приближения для этих значений можно использовать формулы для течения ньютоновской жидкости [8].

Представленная модель может быть использована для описания процессов смешения и диспергирования в различном оборудовании при переработке полимерных композиций. Из общих физических представлений очевидно, что величина минимального зазора  $H_d$  может иметь некоторое оптимальное значение, при котором достигаются максимальные смесительный и диспергирующий эффекты. Это связано с тем, что чрезмерное увеличение этого зазора может привести к снижению сдвиговых напряжений настолько, что не будет обеспечено надлежащее диспергирование наполнителей. Исходя, видимо, из этих соображений, авторы [9] за критерий оптимизации высоты диспергирующего зазора взяли произведение касательного напряжения в зазоре на расход через него. Такой критерий позволял найти оптимальный баланс между касательными напряжениями и объемом композиции, проходящей через зону высоких напряжений. Однако в работах [6, 7] было показано, что степень диспергирования однозначно определяется удельными энергозатратами. Поэтому более логичным представляется взять в качестве критерия оптимизации  $A_d$  высоты диспергирующего зазора  $H_d$  следующее выражение:

$$A_d = \tau_w \dot{\gamma}_m Q, \quad (18)$$

где  $\tau_w$  – касательное напряжение на подвижной стенке;  $\dot{\gamma}_m$  – средняя скорость сдвига в зазоре высотой  $h_d$ ;  $Q$  – объемный расход композиции.

Произведение касательного напряжения на скорость сдвига представляет собой энергозатраты. Это произведение, кстати, отражается в записи диссипативного члена в уравнении энергии (11). Таким образом, критерий (18) позволяет получить оптимальное соотношение между энергозатратами в зазоре и расходом через него. Напряжение измеряется в н/м<sup>2</sup>, скорость сдвига – в 1/с, расход – в м<sup>3</sup>/с. В результате для критерия (18) получается несколько нестандартная размерность – Вт/с.

Задача решалась по итерационной схеме численно методом конечных разностей. Изначально на нулевом шаге итерации использовались распределение скорости и градиента давления по длине канала для изотермического случая течения с постоянной вязкостью, которые легко получаются из (9) и (10). После этого решается уравнение энергии (11) и кинетическое уравнение (13). После нахождения полей температуры и степени диспергирования каждая итерация заканчивалась нахождением эффективной вязкости по (12). На следующем шаге итерации производился уточненный перерасчет распределений скорости, давления и напряжений с учетом зависимости вязкости от температуры и степени диспергирования.

Ниже представлены некоторые результаты расчетов, проведенные в безразмерном виде. Как уже отмечалось выше, должно существовать некоторое оптимальное значение высоты диспергирующего зазора  $h_d$ . При слишком малой высоте зазора расход композиции через область высоких напряжений будет мал, поэтому снижается доля материала, прошедшего через минимальный зазор. Увеличение зазора приводит к снижению сдвиговых напряжений и, как результат, к недостаточной степени диспергирования наполнителя. Рис. 2 показывает влияние высоты минимального зазора на величину обратного потока в канале. Видно, как существенно падает максимальная скорость в области обратного потока при увеличении диспергирующего зазора. Это свидетельствует об увеличении доли материала, проходящего через зазор. Но при этом, очевидно, происходит снижение касательных напряжений в этой зоне.

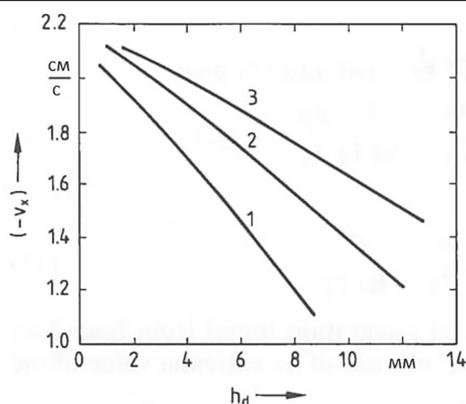


Рис. 2. Зависимость максимальной скорости в области обратного потока ( $x = 0, y = y_0$ ) от высоты диспергирующего зазора. 1 –  $h_0 = 7$  см; 2 –  $h_0 = 11$  см; 3 –  $h_0 = 15$  см.

Поэтому с помощью критерия (18) были проведены расчеты при различных значениях  $h_d$  и  $l_d$ . В результате на рис. 3 были построены серии кривых. Положение максимума на каждой из них показывает оптимальное значение  $h_d$  при различных значениях  $l_d$ . Из этого рисунка видно, что с увеличением  $l_d$  значение оптимальной высоты зазора растет.

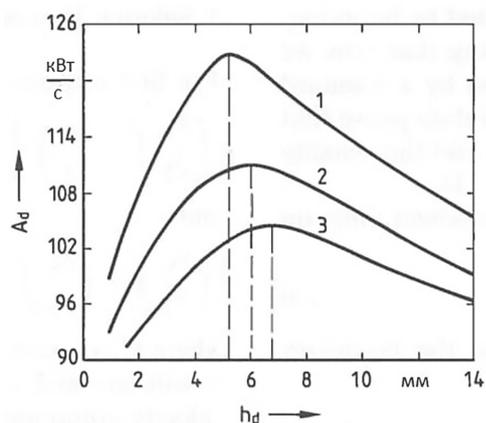


Рис. 3. Определение оптимальной высоты диспергирующего зазора. 1 –  $l_d = 18$  мм; 2 –  $l_d = 24$  мм; 3 –  $l_d = 30$  мм.

Таким образом, в работе впервые поставлена и решена задача о неизоотермическом течении неньютоновской полимерной композиции в сходящемся канале (обобщенное куэттовское течение) на основе реологической модели Эллиса. Использование данной модели позволяет получить в явном виде выражение для профиля скорости. При этом учитывались диссипативные тепловыделения, а также зависимость вязкости от температуры и степени диспергирования наполнителя. Показано существенное влияние высоты минимального зазора на величину максимальной скорости в области обратного потока. Предложен критерий оптимизации высоты минимального зазора и показана методика его применения на практике. Предложенный подход может быть использован в инженерной практике для разработки методов описания и оптимизации течения полимерной композиции в различных зонах перерабатывающего оборудования.

#### Обозначения

$a$  – коэффициент температуропроводности;  $A_d$  – критерий оптимизации высоты диспергирующего зазора;  $b_1, b_2, g$  – эмпирические константы;  $h$  – высота канала;  $h_0$  – высота канала на входе;  $k, m$  – реологические константы модели Эллиса;  $n$  – индекс течения в степенном реологическом законе;  $p$  – давление;  $p_0$  – атмосферное давление;  $v_x$  – осевая компонента скорости;  $\bar{v}_x$  – средняя скорость потока;  $T$  – температура полимера;  $T_w$  – температура стенки канала;  $T_0$  – температура полимера на входе в канал;  $Q$  – объемный расход полимера;  $x, y$  – продольная и поперечная координаты;  $y_0$  – ордината максимального значения скорости;  $\mu$  – вязкость композиции;  $\mu_w$  – вязкость при температуре  $T_w$ ;  $\tau_{xy}$  – напряжение сдвига;  $\dot{\gamma}$  – скорость сдвига;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\psi$  – параметр неизотермичности;  $Pe, Br$  – числа Пекле и Бринкмана соответственно.

#### Литература

1. Баранов А.В. Моделирование процессов неизотермического течения и диспергирования в камере роторного резиносмесителя // Механика композиционных материалов и конструкций. 2003. Т. 9, №3. С. 297–306.
2. Malkin A.Ya., Baranov A.V., Balinov A.I. Modeling non-isothermal mixing in a rotor mixer // Int. Polym. Proc. 1999. Т. 14, N2. С. 115–121.
3. Баранов А.В., Дахин О.Х., Герасименко В.А. Неизотермическое диспергирующее течение резиновой смеси в камере смесителя // Каучук и резина. 1994. №4. С. 33–36.
4. Steller R.T. Generalized slit flow of an Ellis fluid // Polym. Eng. Sci. 2001. V. 41, N11. P. 1859–1870.
5. Ali N., Khan M. W. S. The Graetz problem for the Ellis fluid model // Zeitschrift für Naturforschung A. 2018. N10. P. 1–10.
6. Белокур С.П., Горнер Р.В., Тихонов Н.Н. Энергетические характеристики процесса диспергирующего смешения // Каучук и резина. 1986. №4. С. 21–23.
7. Malkin A.Ya., Baranov A.V., Viculenkova M.E. Estimation of quality of mixing. // Int. Polym. Process. 1993. V. 8, N2. P. 99–103.
8. Wagenknecht U. Zur modellierung der stromungsvorgange im innenmischer unter beachtung nicht-newtonscher werkstoffeigenschaften // Plaste und Kautsch. 1987. B. 34, N6. S. 238–241.
9. Yashizume Shinzi. Analysis of irregular dispersion of carbon black into polymeric material in an oval type mixer // J. Soc. Rheol., Jap. 1987. V. 15, N3. P. 123–130.